TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP. HỒ CHÍ MINH
TRUNG TÂM BỒI DƯỠNG VĂN HÓA VÀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC
ĐÁP ÁN THI THỬ ĐẠI HỌC 6/2014
MÔN TOÁN, KHỐI A, A1. Thời gian làm bài 180 phút.

I. **PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)**.

Câu 1(2,0 điểm).

a) Học sinh tự giải

b) Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm. Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y-y_0=y'(x_0)\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow y-\frac{x_0+2}{x_0-1}=\frac{-3\left(x-x_0\right)}{\left(x_0-1\right)^2}\quad \text{(d)}$$

(d) đi qua A(0; a) nên: $a-\dfrac{x_0+2}{x_0-1}=\dfrac{-3x_0}{\left(x_0-1\right)^2}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x_0)=(a-1)x_0^2-2(a+2)x_0+a+2=0\\x_0\neq1\end{cases}$

Từ A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) $\Leftrightarrow f(x_0)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2\neq1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1\\\Delta'>0\\f(1)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1\\(a+2)^2-(a-1)(a+2)>0\\(a-1)-2(a+2)+a+2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1\\3a+6>0\\-3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1\\a>-2\end{cases}\quad(1)$$

Tung độ của 2 tiếp điểm tương ứng là: $y_1=\dfrac{x_1+2}{x_1-1};y_2=\dfrac{x_2+2}{x_2-1}$

Khi đó 2 tiếp điểm nằm về cùng một phía với Ox $\Leftrightarrow y_1.y_2>0$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1+2}{x_1-1}.\frac{x_2+2}{x_2-1}>0\Leftrightarrow\frac{x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)+4}{x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1}>0\Leftrightarrow\frac{\dfrac{a+2}{a-1}+2\left(\dfrac{2(a+2)}{a-1}\right)+4}{\dfrac{a+2}{a-1}-2\left(\dfrac{a+2}{a-1}\right)+1}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{9a+6}{-3}>0\Leftrightarrow a<-\frac{2}{3}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) ta có giá trị a cần tìm là: $-2<a<-\dfrac{2}{3}$.

Câu 2(1,0 điểm).

PT $\Leftrightarrow 2\cos3x(4\cos^2x-1)=1\Leftrightarrow 2\cos3x(3-4\sin^2x)=1$

Nhận xét $x=k\pi,k\in Z$ không là nghiệm của phương trình đã cho nên ta có:

$2\cos3x(3-4\sin^2x)=1\Leftrightarrow 2\cos3x(3\sin x-4\sin^3x)=\sin x$

$\Leftrightarrow 2\cos3x\sin3x=\sin x\Leftrightarrow \sin6x=\sin x$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x=x+m2\pi\\6x=\pi-x+m2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2m\pi}{5}\\x=\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{2m\pi}{7}\end{array}\right.;m\in Z$$

Xét khi $\dfrac{2m\pi}{5}=k\pi\Leftrightarrow 2m=5k\Leftrightarrow m=5t,t\in Z$

Xét khi $\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{2m\pi}{7}=k\pi\Leftrightarrow 1+2m=7k\Leftrightarrow k=2(m-3k)+1$ hay $k=2l+1$& $m=7l+3,\ l\in Z$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\dfrac{2m\pi}{5}(m\neq5t);x=\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{2m\pi}{7}(m\neq7l+3)$ trong đó $m,t,l\in Z$

Câu 3(1,0 điểm). Điều kiện: $x \ge \frac{1}{4}$ Đặt $y = \sqrt{4x-1}, y \ge 0 \Rightarrow 4x - 1 = y^2$ (*)

Thay $y = \sqrt{4x-1}$ vào PT ta được: $16x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 2y^3$ (**)

Lấy (*) cộng (**) vế theo vế ta được $16x^3 + 4x^2 = 2y^3 + y^2 \Leftrightarrow 2(2x)^3 + (2x)^2 = 2y^3 + y^2$ (***)

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t^2, t \ge 0$, khi đó (***) trở thành $f(2x) = f(y)$

Ta cú $f'(t) = 6t^2 + 2t \ge 0, \forall t \ge 0$ nên hàm số f(t) tăng trên $[0, +\infty)$

Do đó $f(2x) = f(y) \Leftrightarrow y = 2x$. Thay vào (*) ta có $\begin{cases} 2x \ge 0 \\ 4x - 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$

Câu 4(1,0 điểm).

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt,\ x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0.$

Suy ra: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x - 2\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos t - 2\sin t}{(\cos t + \sin t)^3} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos x - 2\sin x}{(\cos x + \sin x)^3} dx$ (Do tích phân không phụ thuộc vào kí hiệu của biến số).

Suy ra: $2I = I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x - 2\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos x - 2\sin x}{(\cos x + \sin x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} d\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. KL: Vậy $I = \frac{1}{2}$.

Câu 5(1,0 điểm).

+BC vuông góc với (SAB)

$\Rightarrow$ BC vuông góc với AH mà AH vuông với SB $\Rightarrow$ AH vuông góc với (SBC)

$\Rightarrow$ AH vuông góc SC (1)

+ Tương tự AK vuông góc SC (2)

(1) và (2) $\Rightarrow$ SC vuông góc với (AHK)

$SB^2 = AB^2 + SA^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{3}$

AH.SB = SA.AB $\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SK = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

(do 2 tam giác SAB và SAD bằng nhau và cùng vuông tại A)

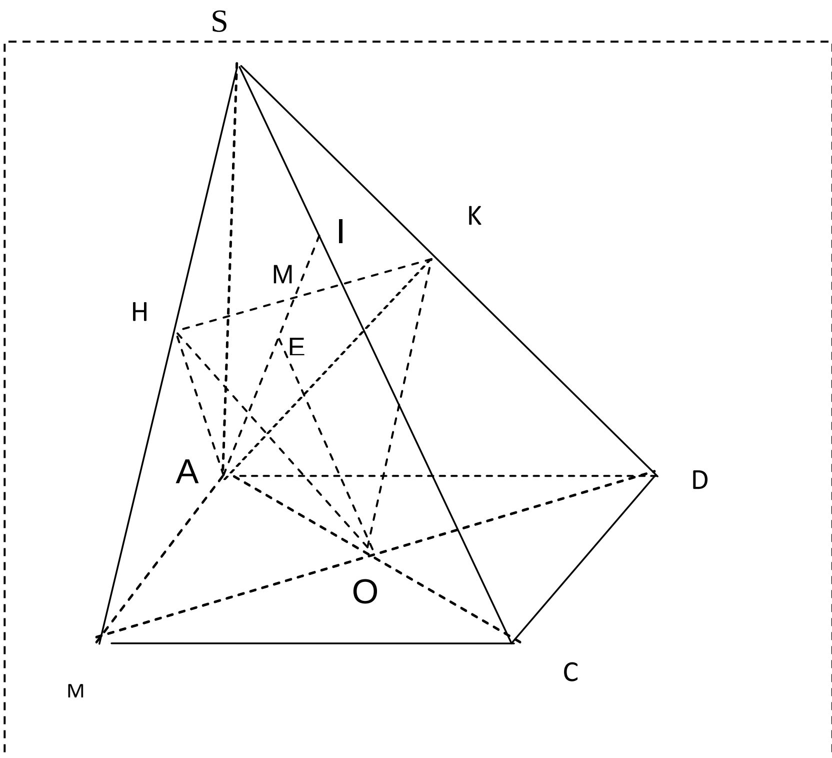
Ta có HK song song với BD nên $\frac{HK}{BD} = \frac{SH}{SB} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Kẻ OE// SC $\Rightarrow OE \perp (AHK)(do SC \perp (AHK))$ suy ra OE là đường cao của hình chop OAHK và OE=1/2 IC=1/4SC = a/2

Gọi AM là đường cao của tam giác cân AHK ta có

$$AM^2 = AH^2 - HM^2 = \frac{4a^2}{9} \Rightarrow AM = \frac{2a}{3}$$

$$V_{OAHK} = \frac{1}{3}OE.S_{AHK} = \frac{1}{3}\frac{a}{2}.\frac{1}{2}HK.AM = \frac{a^3\sqrt{2}}{27}$$



Câu 6(1,0 điểm).

Điều kiện: $2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$. Dẫn đến tìm a để Bpt có nghiệm $\in (1;2]$

Để giải bài tóan đã cho ta giải bài tóan gián tiếp: Tìm a để bpt vô nhiệm $\forall x \in (1;2]$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{2x - x^2} \geq x^2 - ax.2^x + a.2^x.\sqrt{2x - x^2}, \forall x \in (1;2]$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x - x^2}\left(x - a.2^x\right) \geq x\left(x - a.2^x\right); \forall x \in (1;2] \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x - x^2} - x\right)\left(x - a.2^x\right) \geq 0; \forall x \in (1;2] \quad \textbf{(*)}$$

Vì $\sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - (x-1)^2} < 1, \forall x \in (1;2]$

Do đó $\sqrt{2x - x^2} - x < 0, \forall x \in (1;2]$,

nên (*) $\Leftrightarrow x - a.2^x \leq 0, \forall x \in (1;2] \Leftrightarrow a \geq \frac{x}{2^x}, \forall x \in (1;2]$

Xét $f(x) = \frac{x}{2^x}, \forall x \in (1;2] \Rightarrow f'(x) = \frac{2^x - x.2^x.\ln 2}{\left(2^x\right)^2} = \frac{1 - x\ln 2}{2^x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\ln 2}=\log_e 2$.

Bảng xét dấu:

x	1		$\log_e 2$		2
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{1}{e}\log_2 e$	↘	$-\dfrac{1}{2}$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có:

$a \ge f(x), \forall x \in (1;2] \Leftrightarrow a \ge \dfrac{1}{e}\log_2 e$

Vậy để bất pt đã cho có ính nhất một nghiệm x > 1 thì:

$a < \dfrac{1}{e}\log_2 e$

II. PHẦN RIÊNG(3,0 điểm) Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần(phần A hoặc phần B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a(1,0 điểm).

Ta có: $d_1 \cap d_2 = I$. Toạ độ của I là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x-y-3=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9/2 \\ y=3/2 \end{cases}$. Vậy $I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Do vai trò A, B, C, D nên giả sử M là trung điểm cạnh AD $\Rightarrow M = d_1 \cap Ox$

Suy ra M(3; 0)

Ta có: $AB = 2IM = 2\sqrt{\left(3-\dfrac{9}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$

Theo giả thiết: $S_{ABCD} = AB.AD = 12 \Leftrightarrow AD = \dfrac{S_{ABCD}}{AB} = \dfrac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Vì I và M cùng thuộc đường thẳng $d_1 \Rightarrow d_1 \perp AD$

Đường thẳng AD đi qua M (3; 0) và vuông góc với d_1 nhận $\vec{n}(1;1)$ làm VTPT nên có PT: $1(x-3)+1(y-0)=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$. Lại có: $MA = MD = \sqrt{2}$

Toạ độ A, D là nghiệm của hệ PT: $\begin{cases} x+y-3=0 \\ \sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+3 \\ (x-3)^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+3 \\ (x-3)^2+(3-x)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x-3=\pm 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$. Vậy A(2; 1), D(4; -1)

Câu 8.a(1,0 điểm).

2. Ta có mặt cầu (S) có tâm I(1;-3;2) và bán kính R=4

Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}(1;4;1)$

Vì $(P) \perp (\alpha)$ và song song với d có véc tơ chỉ phương $\vec{v}$ nên nhận véc tơ $\overrightarrow{n_p} = \vec{n} \wedge \vec{v} = (2;-1;2)$ làm vtpt. Do đó (P):2x-y+2z+m=0

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I \to (P)) = 4 \Leftrightarrow \quad d(I \to (P)) = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-21 \\ m=3 \end{array}\right.$

Vậy có hai mặt phẳng : 2x-y+2z+3=0 và 2x-y+2z-21=0.

Câu 9.a(1,0 điểm).

Số cách lấy 6 bi tùy ý là C_{10}^{6}

Số cách lấy 6 bi thỏa đề bài là C_{8}^{5}

Suy ra xác suất cần tính là

$$\frac{C_8^5}{C_{10}^6} = \frac{56}{210}$$

B.Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b(1,0 điểm). BC) : 4(x- 2) + 3(y +1) = 0 hay 4x + 3y - 5 =0

+) Tọa độ C là nghiệm của HPT :

$$\begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow C=(-1;3)$$

+) Đường thẳng Δ đi qua B và vuông góc với (d_2) cóVTPT là $\overrightarrow{u_2}=(2;-1)$

Δ có PT : 2(x - 2) - (y + 1) = 0 hay 2x - y - 5 = 0

+) Tọa độ giao điểm H của Δ và (d_2) là nghiệm của HPT :

$$\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow H=(3;1)$$

+) Gäi B' là điểm đối xứng với B qua (d_2) thì :

$$\begin{cases} x_{B'}=2x_H-x_B=4 \\ y_{B'}=2y_H-y_B=3 \end{cases} \Rightarrow B'=(4;3)$$

+) Đường thẳng AC đi qua C(-1 ; 3) và B'(4 ; 3) nên có PT : y - 3 = 0

+) Tọa độ điểm A là nghiệm của HPT :

$$\begin{cases} y-3=0 \\ 3x-4y+27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A=(-5;3)$$

Đường thẳng AB có PT :

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y+1}{-4} \Leftrightarrow 4x+7y-1=0$$

Câu 8.b(1,0 điểm).

Gọi H là hình chiếu của A trên d, mặt phẳng (P) đi qua A và (P)//d, khi đó khoảng cách giữa d và (P) là khoảng cách từ H đến (P).

Giả sử điểm I là hình chiếu của H lên (P), ta có $AH \geq HI$ => HI lớn nhất khi $A \equiv I$

Vậy (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và nhận $\overrightarrow{AH}$ làm véc tơ pháp tuyến.

$H \in d \Rightarrow H(1+2t;t;1+3t)$ vì H là hình chiếu của A trên d nên

$AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ ($\vec{u}=(2;1;3)$ là véc tơ chỉ ph- ơng của d) $\Rightarrow H(3;1;4) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(-7;-1;5)$

Vậy (P): 7(x — 10) + (y — 2) — 5(z + 1) = 0 ⇔ 7x + y -5z -77 = 0

Câu 9.b(1,0 điểm).

Số cách lấy 8 viên tùy ý là C_{18}^{8}

Số cách lấy không có viên loại A là C_{11}^{8}

Số cách lấy không có viên loại B là C_{12}^{8}

Số cách lấy không có viên loại C là C_{13}^{8}

Xác suất cần tính là $1-\frac{C_{11}^8+C_{12}^8+C_{13}^8}{C_{18}^8} = 1-\frac{1947}{43758} = \frac{1267}{1326}$